Examen final de Análisis II
Tercero de Matemáticas. Curso 2002-2003

1. Considera la función compleja dada para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ por:

$$f(z) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

   a) Prueba que $\operatorname{sen}(f(z)) = z\cos(f(z))$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

   b) Justifica que f es holomorfa en el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy \ : \ y \in \mathbb{R}, \ |y| \geqslant 1\}$.

   c) Calcula el desarrollo de Taylor de f centrado en 0.

2. *a*) Sea f una función entera tal $f(z) = f(f(z))$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué puede afirmarse de f?

   b) ¿Puede existir una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ verificando que $|f(z)| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{|z|}}$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$?

3. Dígase, en cada uno de los siguientes casos, si existe o no una función f holomorfa en Ω, cumpliendo las condiciones que se indican, y justifíquese la respuesta:

   a) $\Omega = \mathbb{C}$, $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $f(i) = 0$, $f(-i) \neq 0$.

   b) $\Omega = D(0,1)$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{-1}{2}\right) = 0$.

   c) $\Omega = D(0,1)$, $f^{(n}(0) = n^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   d) $\Omega = D(0,2)$, $\text{máx}\{|f(z)| : |z| = 1\} = 1$, $f(0) = 2$.

4. Dado $a \in \mathbb{C}$, $0 \neq |a| \neq 1$, calcúlese la integral

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)} dz$$

5. Construir un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \ -\pi/2 < \operatorname{Im}(z) < \pi/2\}$$

   sobre el disco unidad $D(0,1)$

Teoría
1) Teorema de Taylor (Se supone conocida la fórmula de Cauchy para una circunferencia).
2) Ceros de una función holomorfa. Principio de identidad.

Debes responder a una sola de las dos preguntas de teoría y hacer cuatro de los cinco ejercicios propuestos. Para aprobar debes hacer *bien* dos ejercicios y una pregunta de teoría.

Granada, 5 de febrero de 2003